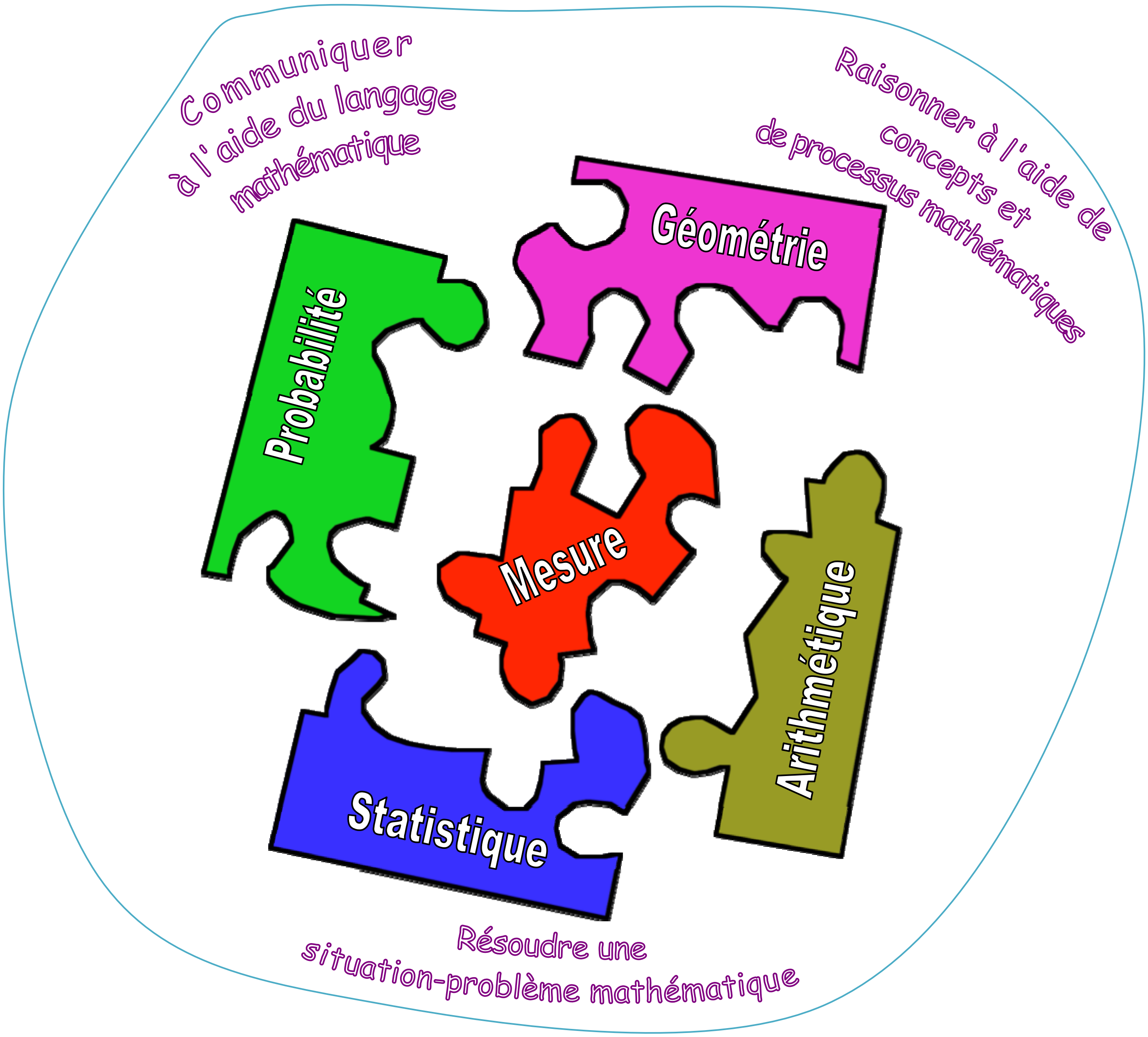
Progression des apprentissages

Mathématique

Document d'accompagnement



Document de travail – Modifié

Anne Marie Carbonneau, CP mathématique primaire, CSDM

19 janvier 2010

Progression des apprentissages
Mathématique
Document d'accompagnement

Dans ce document, on retrouve, en italique, des extraits de la progression des apprentissages pour la mathématique, auxquels sont ajoutées des suggestions, des précisions ainsi que des illustrations relativement :

- aux réseaux de concepts et processus;
- aux éléments du langage mathématique;
- aux structures additives et multiplicatives;
- aux processus personnels (calcul mental et calcul écrit);
- à la géométrie et à la mesure.

À propos de la mathématique…

La mathématique est une science et un langage dont les objets sont abstraits[1]. C'est graduellement que se construit la pensée mathématique chez les élèves, notamment à partir des expériences personnelles et des échanges avec leurs pairs. Ces apprentissages s'appuient sur les situations concrètes souvent liées à la vie quotidienne. Ainsi, l'enseignante et l'enseignant proposent aux élèves diverses activités d'apprentissage qui les amènent à réfléchir, manipuler, explorer, construire, simuler, discuter, structurer ou s'entraîner et qui les aident à s'approprier des concepts, des processus et des stratégies. Ces activités leur permettent d'utiliser des objets, du matériel de manipulation, des références et divers outils ou instruments. Elles les amènent aussi à faire appel à leur intuition, à leur sens de l'observation, à leurs habiletés manuelles ainsi qu'à leur capacité de s'exprimer, de réfléchir et d'analyser, actions essentielles au développement des compétences. Les élèves peuvent établir des liens, se représenter des objets mathématiques de différentes façons, les organiser mentalement, arrivant ainsi progressivement à l'abstraction.

Il importe de placer les élèves dans des situations qui exigent des justifications ou des réponses à des questions telles que « Pourquoi? », « Est-ce toujours vrai? Existe-t-il un exemple qui contredit l'affirmation? », « Qu'arrive-t-il lorsque…? », et ce, dans tous les champs de la mathématique. Ce questionnement les incite à raisonner, à s'approprier des savoirs mathématiques, à interagir et à expliquer leur démarche.

C'est de cette façon que les élèves construisent leur boîte à outils pour communiquer[2] adéquatement dans ce langage qu'est la mathématique, pour raisonner efficacement en établissant des liens entre les concepts et les processus mathématiques et, enfin, pour résoudre des situations-problèmes. L'utilisation pertinente de concepts mathématiques et de stratégies variées leur permet alors de prendre des décisions éclairées sur divers sujets de la vie quotidienne. Associées aux activités d'apprentissage, les situations vécues par les élèves favorisent le développement des savoir-faire et des savoir-agir mathématiques qui leur permettent de mobiliser et de consolider leurs connaissances mathématiques et d'en acquérir de nouvelles.

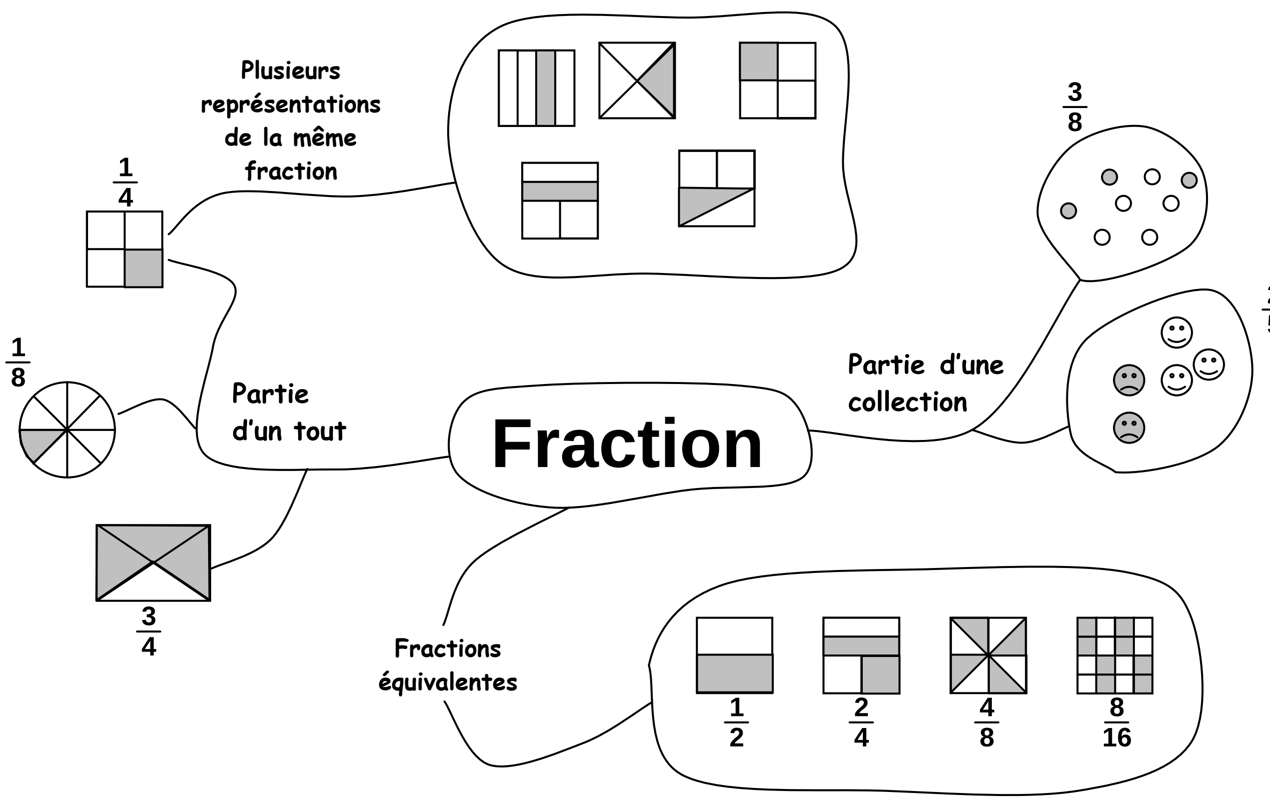
1. Par exemple, un carré ne se trouve pas comme tel dans la nature, mais nous en voyons des représentations.
2. Au-delà de la compétence transversale *Communiquer de façon appropriée*, la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique* demande à l'élève de s'approprier et de coordonner des éléments du langage mathématique (modes de représentation) qui servent à la conceptualisation des objets mathématiques. En exploitant des concepts et des processus mathématiques, l'élève a à interpréter un message ou à produire des messages à caractère mathématique.

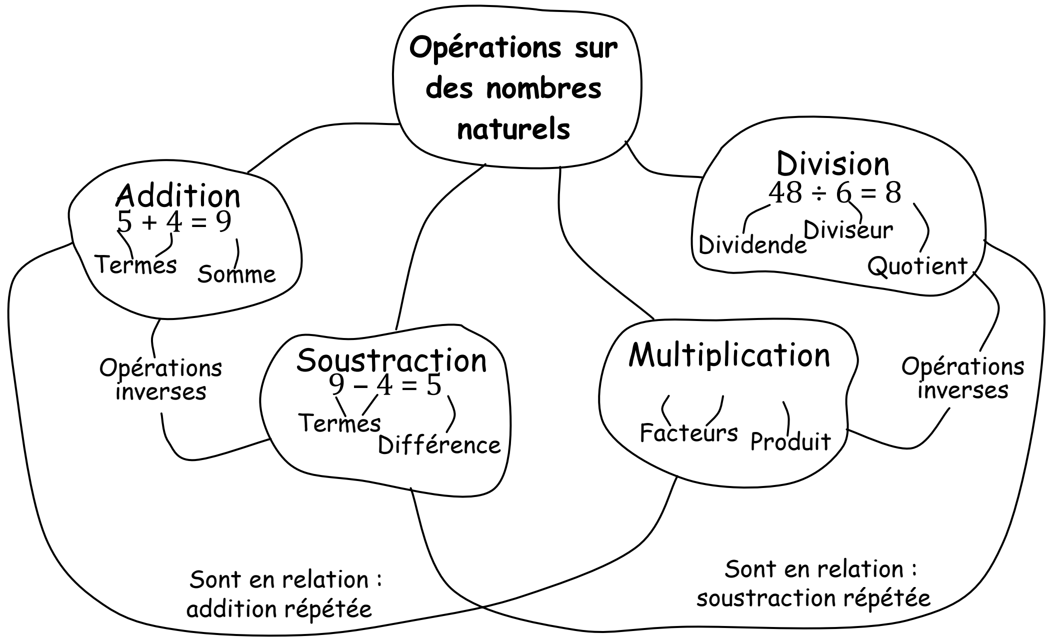
Le tableau ci-dessous rappelle des manifestations relatives à l'apprentissage et à la maîtrise d'un concept, d'un processus ou d'une stratégie.

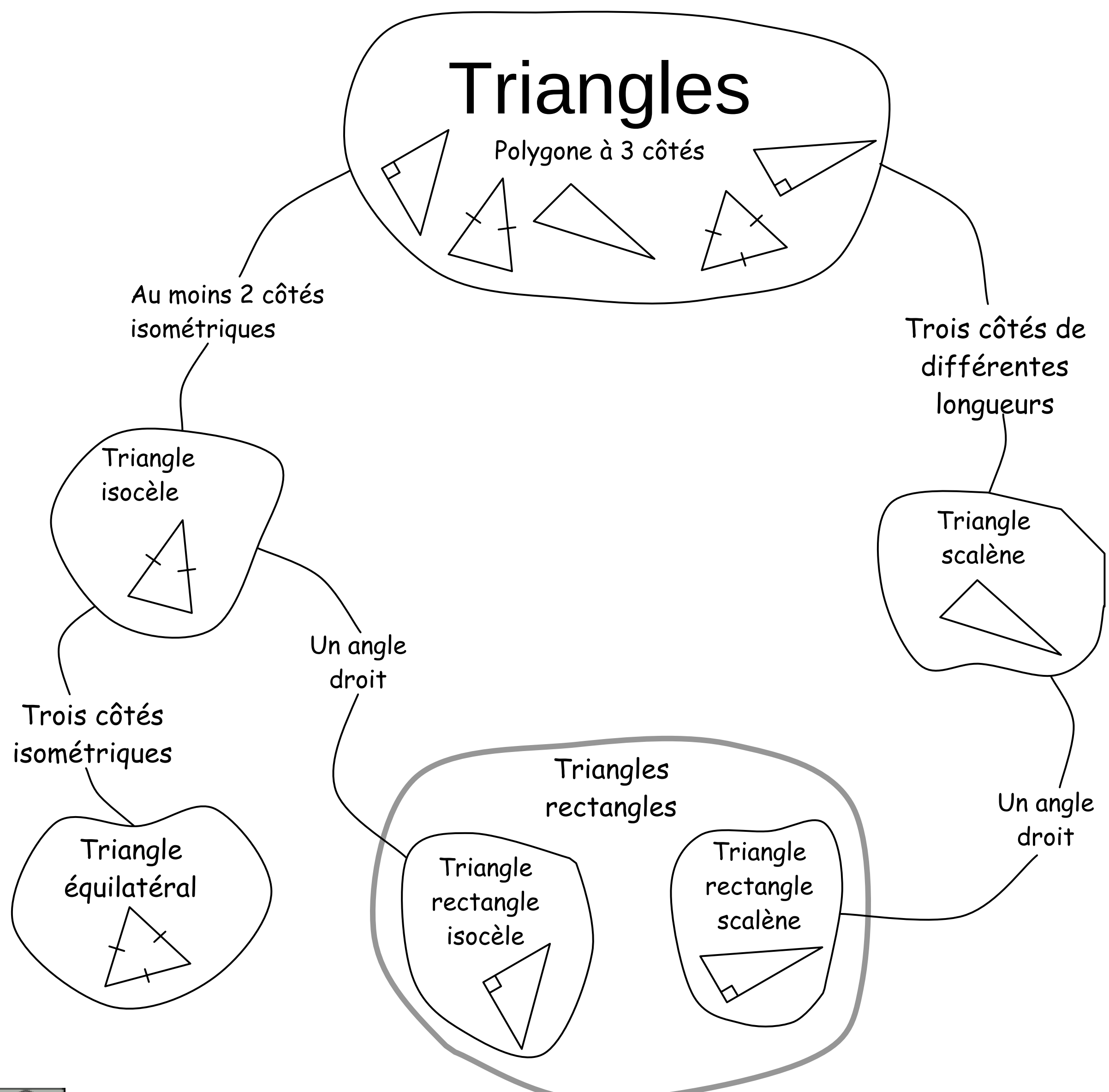
J'ai fait l'apprentissage d'un concept si…	**J'ai fait l'apprentissage d'un processus ou d'une stratégie si…**
• Je peux en dégager les attributs essentiels (propriétés) • Je peux produire des exemples et des contre-exemples • Je peux communiquer une définition personnelle • Je peux lier ce concept à d'autres concepts • Je peux le reconnaître en situation	• Je peux décrire le processus ou la stratégie, le ou la définir ou encore en donner un exemple • J'en connais l'importance et l'utilité • Je peux le ou la mettre en œuvre • Je connais et peux expliquer toutes les étapes que j'ai franchies pour l'appliquer • Je peux comparer mon processus ou ma stratégie avec d'autres • Je peux justifier les étapes de mon processus ou de ma stratégie en m'appuyant sur des concepts et des propriétés • Je sais quand l'utiliser

RÉSEAUX DE CONCEPTS ET DE PROCESSUS

Voici trois exemples de réseaux de concepts et de processus en rapport avec le programme que pourraient faire des élèves. Les réseaux sont dynamiques et personnels à chacun. Ils s'enrichissent donc au fil de l'apprentissage.



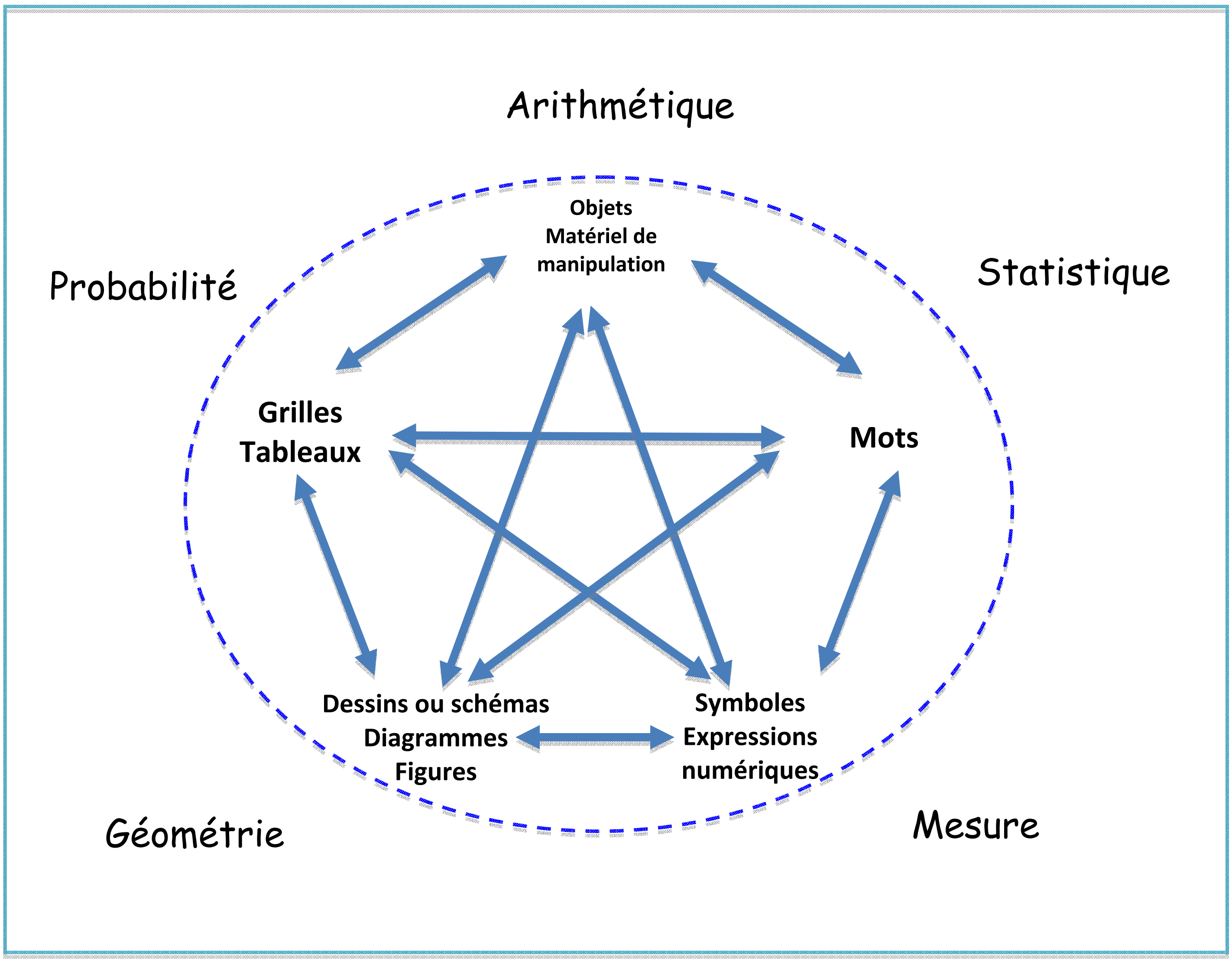

Opérations sur des nombres naturels
Addition
5 + 4 = 9
Termes
Somme
Division
48 ÷ 6 = 8
Dividende
Diviseur
Quotient
Opérations inverses
Soustraction
9 – 4 = 5
Termes
Différence
Multiplication
Facteurs
Produit
Opérations inverses
Sont en relation : addition répétée
Sont en relation : soustraction répétée


Triangles
Polygone à 3 côtés
Au moins 2 côtés isométriques
Trois côtés de différentes longueurs
Triangle isocèle
Triangle scalène
Un angle droit
Trois côtés isométriques
Triangles rectangles
Un angle droit
Triangle équilatéral
Triangle rectangle isocèle
Triangle rectangle scalène

ÉLÉMENTS DU LANGAGE MATHÉMATIQUE

Le langage mathématique est complexe[3], car il est composé de différents langages, dont le langage courant. Au primaire, l'élève se familiarise et s'approprie les éléments de ce langage que sont notamment les mots, les tableaux, les objets, les figures, les diagrammes et les symboles. L'élève développe sa capacité à choisir un ou des modes de représentation appropriés à la situation, à dégager l'information exprimée sous différents modes ainsi qu'à respecter les règles et conventions d'écriture. L'apprentissage et la coordination des éléments du langage mathématique impliquent des passages entre les modes de représentation, et ce, pour tous les champs de la mathématique.

Modes de représentation



3. Le langage mathématique, qui est lié à la conceptualisation, repose sur des conventions régies par des règles précises. L'introduction du vocabulaire et du symbolisme doit se faire avec exactitude même si l'on s'adresse à de jeunes élèves. Des imprécisions et des inexactitudes à cet égard nuisent à la compréhension et au cheminement de l'élève et peuvent être longues et laborieuses à corriger.

LANGAGE MATHÉMATIQUE

Le tableau suivant donne quelques exemples de certaines particularités liées au langage mathématique.

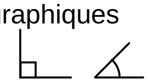
<table>
<tr><td colspan="2">Types d’énoncés
• Énoncés qui contiennent uniquement des mots
Exemple : Vrai ou faux? Si le losange a quatre angles droits, alors le losange est un carré.

• Énoncés qui contiennent des mots et des symboles mathématiques
Exemple : Quelle est la valeur de l’expression (7 + 6) – 3 × 4?

• Énoncés qui contiennent uniquement des symboles mathématiques
Exemple : 3 × 4 = 12</td></tr>
<tr><td>Types de symboles
• Symboles utilisés pour nommer des objets
Exemples : 8, $\frac{3}{5}$, ∠

• Symboles utilisés pour les opérations
Exemples : +, –, ×, ÷

• Symboles utilisés dans les relations
Exemples : >, <, =, ≠, ⊥, ∥

• Symboles graphiques
Exemples : </td><td>Signification de symboles
• L’ordre et la position des symboles affectent la signification
Exemples :
34 et 43

$\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{3}$

1,234 et 12,34 et 123,4

3^2 et 2^3</td></tr>
<tr><td>Règles d’écriture
• Nombre : à chaque tranche de trois chiffres, un espace est requis. Cependant, cet espace n’est pas nécessairement requis pour un nombre naturel à quatre chiffres.
Exemples : 12 345
123 456
1234 ou 1 234

• Couple : un espace est requis après la virgule
Exemple : (3, 2)

• Un espace est requis entre le nombre et une unité de mesure
Exemple : 3,5 g, 4 cm, 2 °C</td><td>Types de notations
• Exponentielle : 3^2 se lit « 3 exposant 2 »

• Fractionnaire : $\frac{2}{3}$ se lit « deux tiers »
$\frac{5}{8}$ se lit « cinq huitièmes »

• Décimale : 2,35 se lit « 2 et 35 centièmes »

• Pourcentage : 3 % se lit « 3 pour cent »
(Note : un espace est requis entre le nombre et le symbole %)</td></tr>
<tr><td>Types et sens des mots
• Mots spécifiques à la mathématique
Exemples : polygone, parallélogramme, perpendiculaire, aléatoire, fraction, centaine, etc.

• Mots ayant une signification en mathématique différente de celle du langage courant (polysémie)
Exemples : produit, facteur, milieu, sommet, volume, croissant, trapèze, longueur, aire, etc.</td><td>Lecture des symboles et des expressions
• Plusieurs mots pour lire
Exemples :
= : … est égal à …
≥ : … est supérieur ou égal à …

• Plusieurs façons de lire une expression
Exemple : « 12 – 5 » peut se lire …
douze moins cinq
de douze soustraire cinq
cinq de moins que douze
enlever cinq de douze
la différence entre douze et cinq</td></tr>
</table>

ARITHMÉTIQUE

Les concepts et les processus à acquérir et à maîtriser dans le champ de l'arithmétique et qui constituent des éléments de base pour l'acquisition des apprentissages en mathématique sont nombreux. Ils ont une portée plus grande du fait qu'ils sont réinvestis dans tous les autres champs de la discipline.

Sens et écriture des nombres

Le sens du nombre se développe dès la petite enfance et se raffine tout au long du cheminement scolaire. Au primaire, il se construit d'abord autour des nombres naturels pour s'enrichir ensuite pendant l'apprentissage des nombres rationnels[4].

C'est par le développement du sens des concepts de quantité et de grandeur que l'élève comprendra la double utilité du nombre pour exprimer un code, une quantité ou une grandeur (aspect cardinal) et pour ordonner des quantités ou des grandeurs (aspect ordinal).

Au départ, la comptine, le dénombrement, les constructions, les représentations, la mise en ordre et la mise en relation des nombres sont des activités essentielles pour le passage à la numération. L'élève progresse ainsi du groupement pour y ajouter l'échange vers la valeur de position, et ce, à l'aide de matériel de manipulation approprié. Un passage trop rapide d'un aspect à l'autre pourra avoir des répercussions sur le sens des opérations aussi bien que sur l'apprentissage de nouveaux nombres.

C'est au primaire que l'élève acquiert les outils de base pour bien comprendre et utiliser des fractions. De prime abord, il doit saisir les concepts (sens) plutôt que les processus de calcul (opération). Cela se fera par un recours systématique à du matériel concret[5] et à des schémas lorsqu'il traitera des situations où interviennent des fractions. Le concept de fraction prend assise dans le développement du sens du nombre pour représenter des partages, des parties d'un tout, des comparaisons de quantités d'objets ou de grandeurs de même nature.

L'exploration des fractions met aussi en place des conventions d'écriture que l'élève doit apprendre à reconnaître, à décoder et à utiliser correctement. La véritable maîtrise des diverses représentations des nombres s'exprime lorsqu'on peut transformer une représentation en une autre pour répondre aux besoins d'une situation donnée. Cette habileté à passer d'une forme à une autre traduit d'abord la compréhension de ces diverses formes et la reconnaissance des écritures des nombres sous forme de fractions, de nombres décimaux ou de pourcentages. Elle confirme aussi la capacité de l'élève à mieux comprendre les données d'une tâche et à choisir la ou les formes qui conviennent le mieux à la recherche d'une solution. De plus, lorsqu'on fait intervenir des unités de mesure (longueur, surface, espace, monnaie, etc.), le passage d'une forme à une autre est parfois nécessaire. Aussi, les habiletés acquises pour bien gérer ces passages seront réinvesties dans tous les champs.

Au troisième cycle du primaire, le premier contact avec les nombres entiers constitue un moment important dans l'apprentissage de la mathématique. En effet, pour la première fois l'élève ouvre une nouvelle dimension aux ensembles de nombres qui lui servaient d'abord à compter (nombres naturels), puis à partager (fractions) et à mesurer (nombres décimaux). Avec les nombres entiers apparaissent de nouveaux concepts : nombres symétriques, opposés, positionnement sur un axe de nombres et dans le plan cartésien, etc. De plus, avec les nombres entiers, les nombres ne sont plus uniquement des quantités, ils sont aussi des êtres mathématiques dont le comportement est soumis à des règles internes aux mathématiques (comme les règles des signes que l'on aborde au premier cycle du secondaire), lesquelles assurent la cohérence de la construction des savoirs.

4. *L'ensemble des nombres rationnels inclut l'ensemble des nombres entiers qui inclut lui-même l'ensemble des nombres naturels.*

5 Voir Annexe 1 p. 23 et suivante pour exemple de matériel

Sens des opérations sur des nombres

Pour se donner une bonne compréhension des opérations et de leurs divers sens dans des contextes variés, l'élève doit connaître les relations entre les données et entre les opérations, choisir les bonnes opérations et les effectuer en tenant compte des propriétés[6] *et des priorités des opérations. Il doit également se donner une idée de l'ordre de grandeur du résultat.*

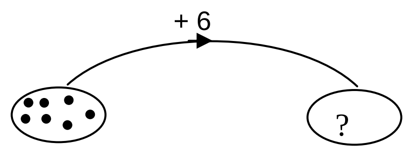
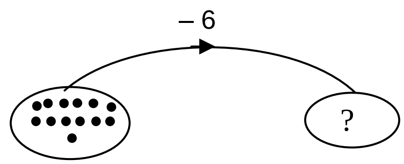
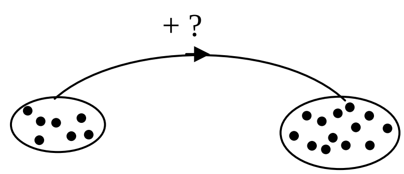
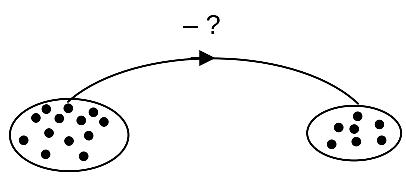
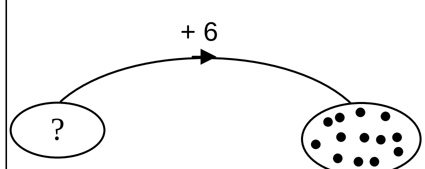
L'élève sera donc amené à mathématiser une variété de situations illustrant différents sens. Il le fera de façon concrète, semi-concrète ou symbolique. Ces situations devront lui permettre de transposer un problème en problèmes plus simples en plus de dégager, entre les données d'un problème, des relations qui vont permettre de progresser vers une solution. Comme le sens des opérations arithmétiques se développe en même temps que le sens du nombre, ils doivent être travaillés de concert.

Dans un esprit d'intradisciplinarité, toutes les occasions sont propices pour développer et exploiter les différents sens des opérations, et ce, dans tous les champs de la mathématique.

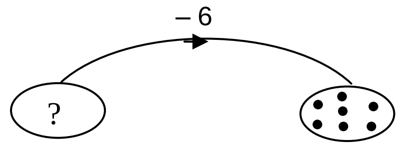
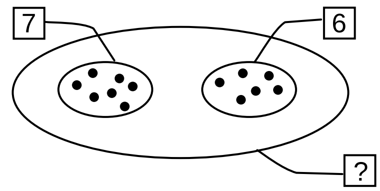
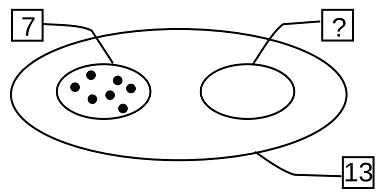
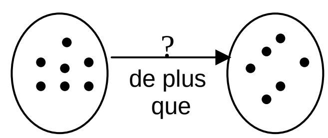
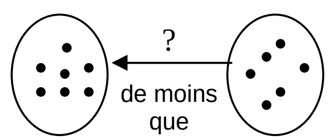
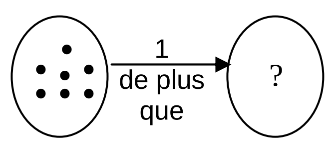
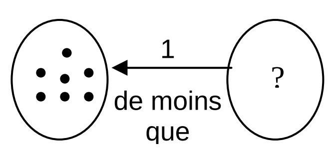
6. Il serait préférable d'introduire le vocabulaire associé aux propriétés (commutativité, associativité et distributivité) plutôt que d'utiliser des expressions plus ou moins précises qui les décrivent.

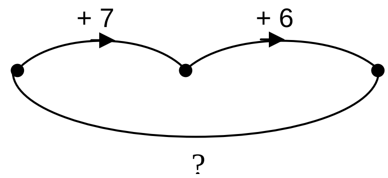
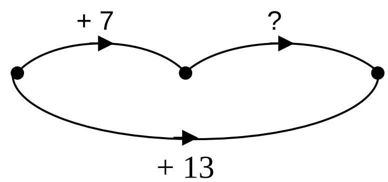
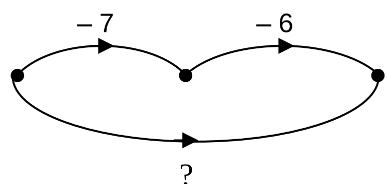
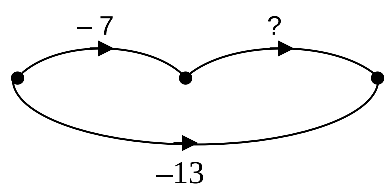
LES STRUCTURES ADDITIVES

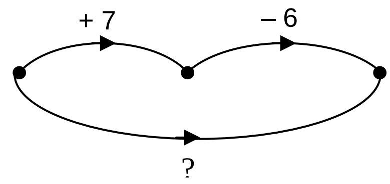
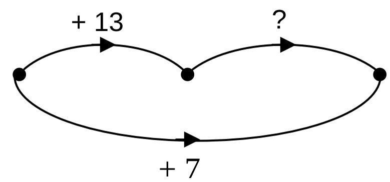
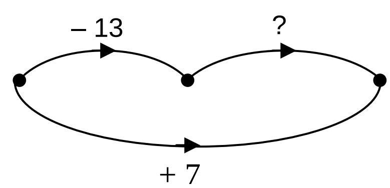
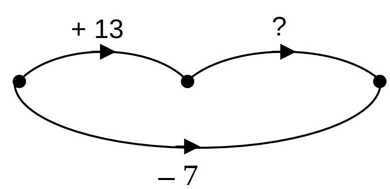
Les techniques opératoires, les liens entre les opérations et les propriétés des opérations n'ont réellement de sens que lorsqu'ils sont au service de situations à mathématiser et à résoudre. Les *structures additives* concernent l'addition et la soustraction, peu importe le type de nombres. À chaque cycle de l'enseignement primaire, la variété des situations présentées est essentielle : transformation (ajout ou retrait), réunion, comparaison (de plus ou de moins), composition de transformations (positive, négative ou mixte). Les élèves n'ont pas à connaître ou à retenir les différents noms associés aux structures. Ils ont plutôt à développer leur propre représentation de ces structures. Le tableau ci-dessous présente une diversité de situations avec des niveaux de difficulté fort différents.

La structure ou le sens	**La situation[7]**	**Un modèle (selon la situation, l'élève créera ses propres représentations)**	**L'équation**
Transformation (ajout) Recherche de l'état final	Gustave a 7 objets. Mélanie lui en donne 6. Combien Gustave a-t-il d'objets?		7 + 6 = ❒
Transformation (retrait) Recherche de l'état final	Gustave a 13 objets. Il en donne 6 à Mélanie. Combien d'objets Gustave a-t-il maintenant?		13 – 6 = ❒
Transformation (ajout) Recherche de la transformation	Gustave a 7 objets. Mélanie lui en donne. Maintenant, Gustave en a 13. Combien d'objets Mélanie a-t-elle donnés à Gustave?		7 + ❒ = 13
Transformation (retrait) Recherche de la transformation	Gustave a 13 objets. Il en donne à Mélanie. Maintenant, Gustave en a 7. Combien Gustave a-t-il donné d'objets à Mélanie?		13 – ❒ = 7
Transformation (ajout) Recherche de l'état initial	Gustave a des objets. Mélanie lui en donne 6. Maintenant, Gustave en a 13. Combien Gustave avait-il d'objets?		❒ + 6 = 13

7. Les exemples suivants ne comportent que deux données. L'enseignant veillera cependant à proposer des situations pouvant comporter plusieurs données, impliquant plusieurs sens, comportant des données superflues ou manquantes.

Transformation (retrait) Recherche de l'état initial	Gustave a un certain nombre d'objets. Il en donne 6 à Mélanie. Il a maintenant 7 objets. Combien Gustave avait-il d'objets?		❐ – 6 = 7
Réunion (union) Recherche de l'ensemble	Gustave a 7 objets. Mélanie en a 6. Combien en ont-ils ensemble?		7 + 6 = ❐
Réunion (union) Recherche d'un sous-ensemble (complément)	Mélanie et Gustave ont 13 objets ensemble. Gustave en a 7. Combien Mélanie en a-t-elle?		7 + ❐ = 13 13 – 7 = ❐
Comparaison (« de plus ») Recherche de la comparaison	Gustave a 7 objets. Mélanie en a 6. Combien Gustave a-t-il d'objets de plus que Mélanie?		7 = 6 + ❐ 7 – ❐ = 6
Comparaison (« de moins ») Recherche de la comparaison	Gustave a 7 objets. Mélanie en a 6. Combien Mélanie a-t-elle d'objets de moins que Gustave?		7 = 6 + ❐ 7 – ❐ = 6
Comparaison (« de plus ») Recherche d'un ensemble	Gustave a 7 objets. Il a 1 objet de plus que Mélanie. Combien Mélanie a-t-elle d'objets?		7 – 1 = ❐ 7 = ❐ + 1
Comparaison (« de moins ») Recherche d'un ensemble	Gustave a 7 objets. Mélanie a 1 objet de moins que Gustave. Combien Mélanie a-t-elle d'objets?		7 – 1 = ❐ 7 = ❐ + 1

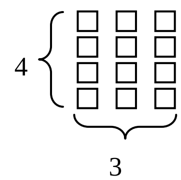
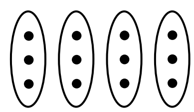
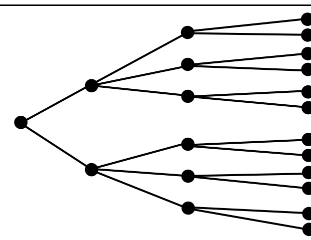
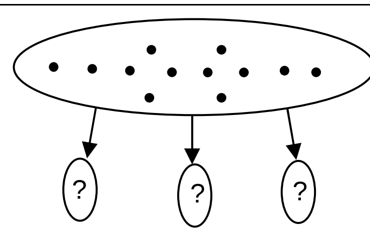
Composition de transformations (positive) Recherche du gain	Hier, Gustave a reçu 7 objets. Aujourd'hui, il en reçoit encore 6. Combien d'objets a-t-il reçus en 2 jours?		7 + 6 = ❒
Composition de transformations (positive) Recherche d'une transformation	Hier, Gustave a reçu 7 objets. Aujourd'hui, il en reçoit encore mais on ne sait pas combien. Sachant que, depuis 2 jours, il a reçu 13 objets, a-t-il plus ou moins d'objets aujourd'hui et combien?		7 + ❒ = 13
Composition de transformations (négative) Recherche de la perte	Hier, Gustave a donné 7 objets. Aujourd'hui, il en a donné 6. Combien d'objets a-t-il donnés depuis 2 jours?		7 + 6 = ❒
Composition de transformations (négative) Recherche d'une transformation	Hier, Gustave a donné 7 objets. Aujourd'hui, il en donne encore mais on ne sait pas combien. Sachant que, depuis 2 jours, il a donné 13 objets, combien d'objets a-t-il donnés aujourd'hui?		7 + ❒ = 13

Composition de transformations (mixte)[8] Recherche du gain ou de la perte	Hier, Gustave a reçu 7 objets. Aujourd’hui, il en a donné 6. Combien d’objets a-t-il de plus ou de moins en 2 jours?		7 – 6 = ❒
Composition de transformations (mixte) Recherche d’une transformation	Hier, Gustave a reçu 13 objets. Sachant que, depuis 2 jours, il a reçu 7 objets, combien d’objets a-t-il reçus ou donnés aujourd’hui?		13 – ❒ = 7
Composition de transformations (mixte) Recherche d’une transformation	Hier, Gustave a donné 13 objets. Sachant que, depuis 2 jours, il a reçu 7 objets, combien d’objets a-t-il reçus ou donnés aujourd’hui?		–13 + ❒ = 7
Composition de transformations (mixte) Recherche d’une transformation	Hier, Gustave a reçu 13 objets. Sachant que, depuis 2 jours, il a donné 7 objets, combien d’objets a-t-il reçus ou donnés aujourd’hui?		13 – ❒ = –7

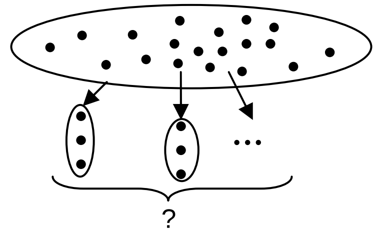
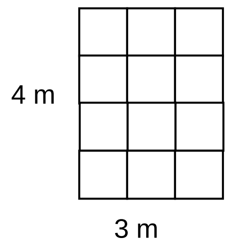
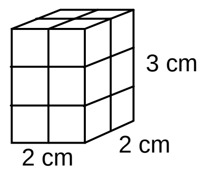
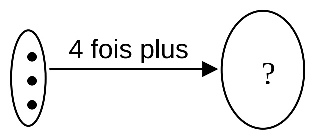
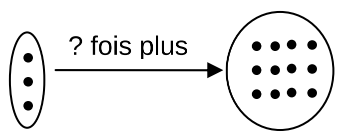
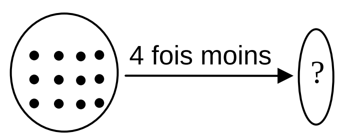
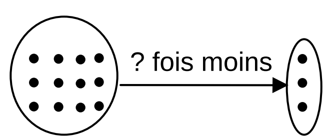
8. Les problèmes de composition de transformations (mixte) nécessitent l’utilisation des nombres entiers. Ils seront résolus, au 3e cycle du primaire, à l’aide d’un schéma ou d’une droite numérique.

LES STRUCTURES MULTIPLICATIVES

Les techniques opératoires, les liens entre les opérations et les propriétés des opérations n'ont réellement de sens que lorsqu'ils sont au service de situations à mathématiser et à résoudre. Les *structures multiplicatives* concernent la multiplication et la division, peu importe le type de nombres. Dans l'enseignement, la variété des situations présentées aux élèves est beaucoup plus importante que les différents noms associés aux structures telles que : addition répétée, combinaison ou produit cartésien, arrangement rectangulaire, aire et volume, comparaison (fois plus que), soustraction répétée, partage, contenance, comparaison (fois moins que). Le tableau ci-dessous présente une diversité de situations avec des niveaux de difficulté fort différents.

La structure ou le sens		**La situation[9]**	**Un modèle** **(selon la situation, l'élève créera ses propres représentations)**	**L'équation**
Disposition rectangulaire		Dans la classe, il y a 3 rangées contenant chacune 4 pupitres. Combien y a-t-il de pupitres dans cette classe?		$3 \times 4 = \square$ ou $4 \times 3 = \square$
Addition répétée		Gustave reçoit 3 objets par jour. Combien d'objets reçoit-il en 4 jours?		$3 + 3 + 3 + 3 = \square$ $3 \times 4 = \square$ ou $4 \times 3 = \square$
Combinatoire	Produit cartésien	Gustave a 4 chemises et 3 pantalons. Combien d'ensembles peut-il porter?	| C1 | C2 | C3 | C4 P1 | P1C1 | P1C2 | P1C3 | P1C4 P2 | P2C1 | P2C2 | P2C3 | P2C4 P3 | P3C1 | P3C2 | P3C3 | P3C4	$4 \times 3 = \square$ ou $3 \times 4 = \square$
	Arbre	À la cafétéria, on offre 2 choix de soupe, 3 mets principaux et 2 desserts. Combien de menus différents peut-on prendre?		$2 \times 3 \times 2 = \square$
Partage		Dans un sac, il y a 12 objets. On les distribue également à 3 amis. Combien chaque ami recevra-t-il d'objets?		$12 \div 3 = \square$

9. Les exemples suivants ne comportent généralement que deux données. L'enseignant veillera cependant à proposer des situations pouvant comporter plusieurs données, impliquant plusieurs sens, comportant des données superflues ou manquantes.

Contenance	On veut placer 12 objets dans des sacs. Chaque sac en contient 3. Combien de sacs aura-t-on besoin?		12 ÷ 3 = ❒
Aire	Une plate-bande mesure 4 m de largeur par 3 m de longueur. Quelle est l'aire de cette plate-bande?		4 × 3 = ❒ ou 3 × 4 = ❒
Volume	Une boîte ayant la forme d'un prisme à base rectangulaire mesure 2 cm de largeur, 2 cm de profondeur et 3 cm de hauteur. Quel est le volume de cette boîte?		2 × 2 × 3 = ❒ 2 × 3 × 2 = ❒ ou …
Comparaison (« fois plus ») Recherche d'un des ensembles	Gustave a 3 objets. Mélanie en a 4 fois plus. Combien d'objets Mélanie a-t-elle?		3 x 4 = ❒
Comparaison (« fois plus ») Recherche de la relation	Gustave a 3 objets et Mélanie en a 12. Mélanie a combien de fois plus d'objets que Gustave?		3 x ❒ = 12 ou 12 ÷ 3 = ❒
Comparaison (« fois moins ») Recherche d'un des ensembles	Gustave a 12 objets. C'est 4 fois plus que Mélanie. Combien d'objets Mélanie a-t-elle?		12 ÷ 4 = ❒
Comparaison (« fois moins ») Recherche de la relation	Gustave a 12 objets et Mélanie en a 3. Mélanie a combien de fois moins d'objets que Gustave?		12 ÷❒ = 3 ou 12 ÷ 3 = ❒

Opérations sur des nombres

Au fur et à mesure qu'il développe son sens du nombre et des opérations, l'élève sera appelé à construire des processus personnels et à utiliser des processus conventionnels pour effectuer diverses opérations. Il sera amené à comprendre l'équivalence entre ces différents processus et à acquérir certains automatismes. Il apprendra aussi, à partir de ces processus et des propriétés des opérations, à faire des approximations de résultats et à déterminer des résultats exacts, mentalement ou par écrit.

Pour réaliser les activités de la vie courante, il faut développer des moyens efficaces pour calculer mentalement en l'absence de support ou d'outils. Lorsque l'élève est en présence d'une situation nécessitant un calcul, sa première décision consiste à déterminer si un résultat exact est exigé ou si un calcul approximatif suffit. Le développement d'habiletés mentales qui servent à obtenir des résultats exacts ou approximatifs se fait au fil des ans, à la condition de s'y exercer. Une attention spéciale est apportée aux stratégies (souvent différentes des stratégies écrites) permettant de faire mentalement des opérations. L'élève approfondit ainsi son sens du nombre et des opérations. Les approximations, d'autre part, lui permettent de vérifier la pertinence des résultats obtenus, de déceler des résultats erronés affichés sur sa calculatrice et d'effectuer des calculs avec confiance. L'élève doit donc prendre l'habitude de faire une approximation du résultat avant d'effectuer un calcul, de façon à vérifier la vraisemblance des résultats obtenus au moyen des autres méthodes.

Transformer une égalité, c'est pouvoir d'abord décrire les éléments mis en relation et la relation elle-même qui est établie entre les données. C'est aussi pouvoir tirer de cette égalité d'autres égalités équivalentes où interviennent les mêmes données en utilisant les propriétés de l'égalité, les relations entre les opérations et les propriétés de ces opérations (ex. : de l'égalité $7 + 3 = 10$, on peut générer les égalités $3 + 7 = 10$, $10 = 7 + 3$, $7 = 10 – 3$; $64 + 99 = 64 + 100 – 1$, etc.).

Les situations qui lui sont proposées doivent aussi comporter des régularités numériques ou non numériques (couleurs, formes, sons, etc.) afin d'appuyer le développement du sens du nombre et des opérations. Elles lui permettront d'observer et de décrire diverses régularités, des suites de nombres et d'opérations telles que la suite des nombres pairs, la suite des multiples de 5, la suite des nombres triangulaires. Elles le conduiront ainsi à ajouter des termes à une suite, à énoncer des règles générales ou à construire des modèles. Il pourra alors énoncer ou déduire des définitions, des propriétés et des règles.

La maîtrise des faits numériques (répertoire mémorisé) repose principalement sur une construction à l'aide de matériel varié dans des contextes diversifiés. Pour construire les faits numériques de base, l'élève peut procéder en s'appuyant sur les propriétés des nombres et des opérations et de régularités telles que l'utilisation du nombre 0 dans l'addition et la multiplication, l'utilisation du nombre 1 dans la multiplication, par comptage par bonds (ex. : suite des multiples de 2, de 5, etc.), les doubles ou les carrés, la commutativité (ex. : $3 + 5 = 5 + 3 = 8$), la distributivité et la compensation (ex. : 7×6, c'est 6 de plus que 6×6). L'élève dégage, à l'aide de matériel, ces propriétés ou régularités. À observer des tables de nombres (sous forme de grille), l'élève voit mieux la généralité de certaines propriétés. Ces actions facilitent la mémorisation des faits numériques et permettent le développement d'automatismes et de nouvelles stratégies pour retrouver ceux qu'on oublie.

À tous les cycles, l'utilisation de la calculatrice doit se faire à bon escient comme outil de calcul, outil de vérification ou outil d'apprentissage (ex. : régularité, décomposition d'un nombre, priorité des opérations). Dans différentes situations, elle permet de pallier des carences de calculs pour se centrer sur d'autres priorités, dont le développement de stratégies. Certains problèmes signifiants peuvent également être abordés même si l'ampleur des calculs et la taille des nombres impliqués dépassent les exigences du programme. Elle permet aussi à certains élèves de résoudre des situations plus complexes où l'accent est mis sur l'élaboration de stratégies plutôt que sur la maîtrise de calculs écrits.

À PROPOS DES PROCESSUS PERSONNELS

Mentalement ou par écrit, les stratégies développées par l'élève dans la construction de processus personnels offrent plusieurs avantages, dont un apport non négligeable dans le développement du sens du nombre. En effet, contrairement aux processus conventionnels qui utilisent les chiffres, les processus personnels emploient les nombres.

Calcul écrit

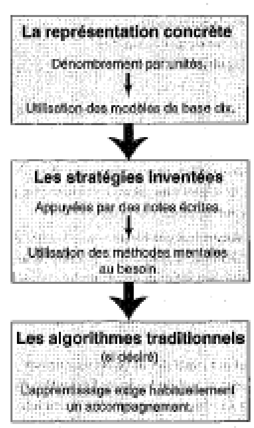
La construction des processus personnels de calcul écrit par les élèves est un aspect important du programme de mathématique. En effet, les élèves disposent de deux ans pour les développer avant d'aborder l'apprentissage des processus conventionnels : l'addition et la soustraction au premier cycle, la multiplication et la division au deuxième cycle.

Les premières traces des processus personnels de calcul écrit des élèves se rapprochent peu des processus de calcul conventionnels. Ces traces font davantage appel aux dessins et le symbolisme peut y être présent. D'entrée de jeu, il est important de laisser les élèves explorer et découvrir leur processus de calcul en les aidant à établir des liens avec les principes de numération en base 10. En début de cycle, ils n'utilisent que des dessins pour représenter leurs processus de calcul. Ce n'est que vers la fin du cycle qu'ils introduisent la notation symbolique après avoir fait une manipulation concrète ou semi-concrète.

Vers la fin du 1^er^ cycle, les élèves utilisent à la fois du matériel de manipulation non structuré (jetons, cubes emboîtables, etc.) et structuré (blocs base 10) pour effectuer des opérations portant sur des nombres à trois chiffres. Ce matériel leur permet de mieux visualiser les opérations.

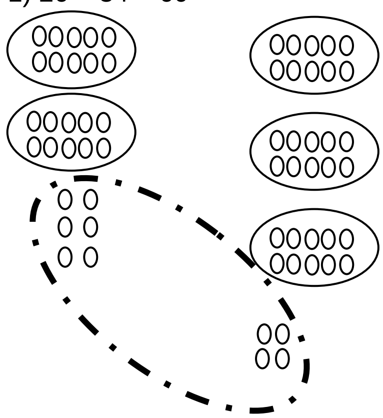
Pour communiquer par écrit leurs processus de calcul, certains élèves dessinent des objets alors que d'autres optent pour un mode de représentation plus symbolique (ex. : en réduisant leurs dessins ou en utilisant un code de couleurs). De telles façons de faire sont tout à fait acceptables de la part d'élèves qui comprennent bien les principes de la numération en base 10 et qui ont atteint un stade de développement leur permettant de recourir par eux-mêmes à un mode de représentation qui tend vers le symbolisme.

Il importe de respecter les besoins et l'évolution de chaque élève et de ne pas exiger que tous aient recours au même mode de représentation des processus de calcul. Il doit s'agir de véritables processus personnels, mis en place par les élèves, et non des processus conventionnels déguisés. Après chaque activité ou situation, la mise en commun des stratégies utilisées est toujours bénéfique (renforcement pour certains, élément déclencheur pour d'autres).

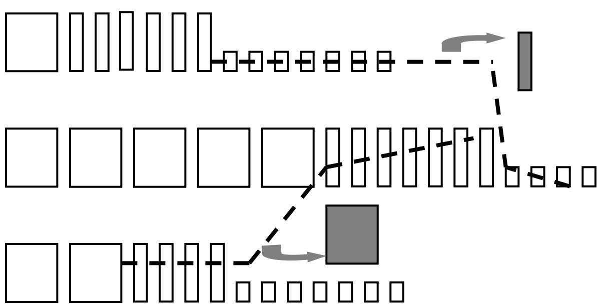


Voici des exemples[10] de processus personnels réalisés par des élèves du premier cycle :

1) 26 + 34 = 60

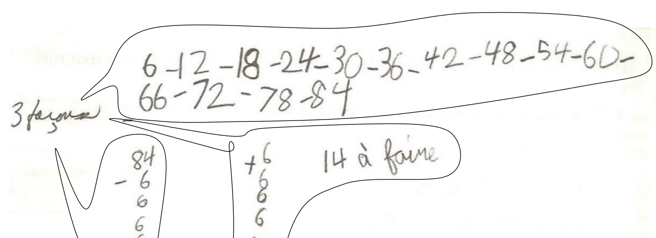


2) 167 + 574 + 247 = 988

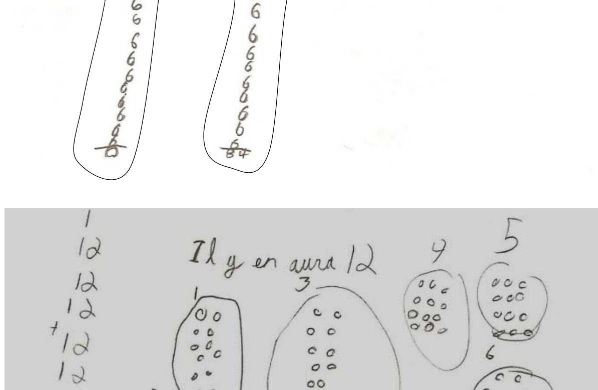


Voici d'autres exemples de processus personnels réalisés par des élèves du deuxième cycle :

1) 84 ÷ 6 = 14



2) 72 ÷ 6 = 12



10. L'écriture des opérations ou des égalités à l'horizontale est à privilégier. Elle n'oriente pas la façon de faire chez l'élève.

Calcul mental

Le calcul mental est une activité intellectuelle bien différente de la simple mémorisation des tables. Elle est beaucoup plus complexe et combien stimulante. Les processus inventés par les élèves sont souvent très ingénieux. Ces processus se font dans la tête, sans crayon. Par exemple, pour calculer par écrit 32 + 59, l'élève utilise probablement le processus conventionnel :

$$\begin{array}{r} \mathbf{1} \\ 32 \\ +\,59 \\ \hline \mathbf{91} \end{array}$$

Dans sa tête, le même calcul se fera beaucoup mieux en utilisant le processus suivant :

$$\underbrace{32 \quad + \quad \underbrace{60}_{(59\,+\,1)}}_{92\,-\,1} = 91$$

La recherche de processus personnels pour effectuer des calculs mentalement exige de faire des liens entre ses connaissances sur les nombres et les opérations et de les organiser.

Par exemple, pour calculer 2×325, je ferai $\underbrace{2 \times 300}_{600} + \underbrace{2 \times 25.}_{50} = 650$

Dans ce contexte, le sens du nombre est grandement sollicité. Plus particulièrement, il faut être à l'aise avec la valeur de position, la décomposition des nombres, la recherche de l'ordre de grandeur et le passage d'une forme d'écriture à une autre. On met également à profit le sens des opérations par l'utilisation efficace des relations entre les opérations ainsi que leurs propriétés. Le tableau suivant présente quelques exemples montrant ces implications.

Processus	Exemple	Connaissances
Additionner en complétant le premier terme à la dizaine	47 + 14 = 47 + (3 + 11) = (47 + 3) + 11 = 50 + 11 = 61	Valeur de position Décomposition Associativité
Additionner en complétant le premier terme à la dizaine Compensation	37 +16 = 37 + 3 + 16 – 3 = 40 + 16 – 3 = 56 – 3 = 53	Associativité
Additionner les dizaines, puis additionner les unités	49 +28 = 40 + 9 + 20 + 8 = 40 + 20 + 9 + 8 = 60 + 17 = 77	Valeur de position Décomposition Commutativité
Soustraire les dizaines, puis les unités	46 – 12 = 46 – 10 – 2 = (46 – 10) – 2 = 36 – 2 = 34	Valeur de position Décomposition
Soustraire en complétant le deuxième terme à la dizaine	54 – 18 = 54 – 20 + 2 = (54 – 20) + 2 = 34 + 2 = 36	Valeur de position Décomposition
Soustraire en faisant apparaître le même nombre d'unités Compensation	51 – 38 = 51 + 7 – 38 – 7 = (58 – 38) – 7 = 20 – 7 = 13	Décomposition

Multiplier en décomposant le multiplicande (1er facteur)	$23 \times 4 = (20 + 3) \times 4$ $= (20 \times 4) + (3 \times 4)$ $= 80 + 12$ $= 92$	Décomposition Distributivité
Multiplier en décomposant le multiplicateur (2e facteur)	$23 \times 12 = 23 \times (10 + 2)$ $= (23 \times 10) + (23 \times 2)$ $= 230 + 46$ $= 276$	Décomposition Distributivité
Pour multiplier par 4 ou 8, multiplier par 2 deux fois ou trois fois	$13 \times 4 = 13 \times 2 \times 2$ $= 26 \times 2$ $= 52$	Décomposition (en facteurs premiers)
Pour multiplier par 6, multiplier par 2, puis multiplier par 3 ou vice versa	$15 \times 6 = 15 \times 2 \times 3$ $= 30 \times 3$ $= 90$	Décomposition (en facteurs premiers)
Pour multiplier par 5, multiplier par 10, puis diviser par 2 ou vice versa	$28 \times 5 = 28 \times 10 \div 2$ $= (28 \times 10) \div 2$ $= 280 \div 2$ $= 140$	$28 \times 5 = 28 \div 2 \times 10$ $= (28 \div 2) \times 10$ $= 14 \times 10$ $= 140$
Diviser en faisant apparaître dans le dividende un multiple du diviseur	$42 \div 3 = (30 + 12) \div 3$ $= (30 \div 3) + (12 \div 3)$ $= 10 + 4$ $= 14$	Décomposition Distributivité
Diviser en faisant apparaître dans le dividende un multiple du diviseur	$54 \div 3 = (60 - 6) \div 3$ $= (60 \div 3) - (6 \div 3)$ $= 20 - 2$ $= 18$	Décomposition Distributivité
Diviser en scindant le diviseur en plusieurs facteurs	$54 \div 18 = (54 \div 2) \div 9$ $= 27 \div 9$ $= 3$	Décomposition en facteurs
Pour diviser par 5, multiplier par 2, puis diviser par 10 ou vice versa	$140 \div 5 = 140 \times 2 \div 10$ $= 280 \div 10$ $= 28$	$140 \div 5 = 140 \div 10 \times 2$ $= 14 \times 2$ $= 28$
Compensation	$80 \times 0{,}3 = (80 \div 10) \times (0{,}3 \times 10)$ $= 8 \times 3$ $= 24$	
Multiples d'un même nombre Compensation	$3500 \div 500 = (3500 \div 100) \div (500 \div 100)$ $= 35 \div 5$ $= 7$	

GÉOMÉTRIE

Avant son arrivée au préscolaire, l'enfant prend contact avec la forme des objets dans son environnement et acquiert les premières notions topologiques d'intérieur, d'extérieur, de dessus et de dessous; il acquiert aussi les rudiments du repérage dans l'espace. Au préscolaire, il commence à organiser l'espace et à mettre des objets en relation : comparer, classer et grouper.

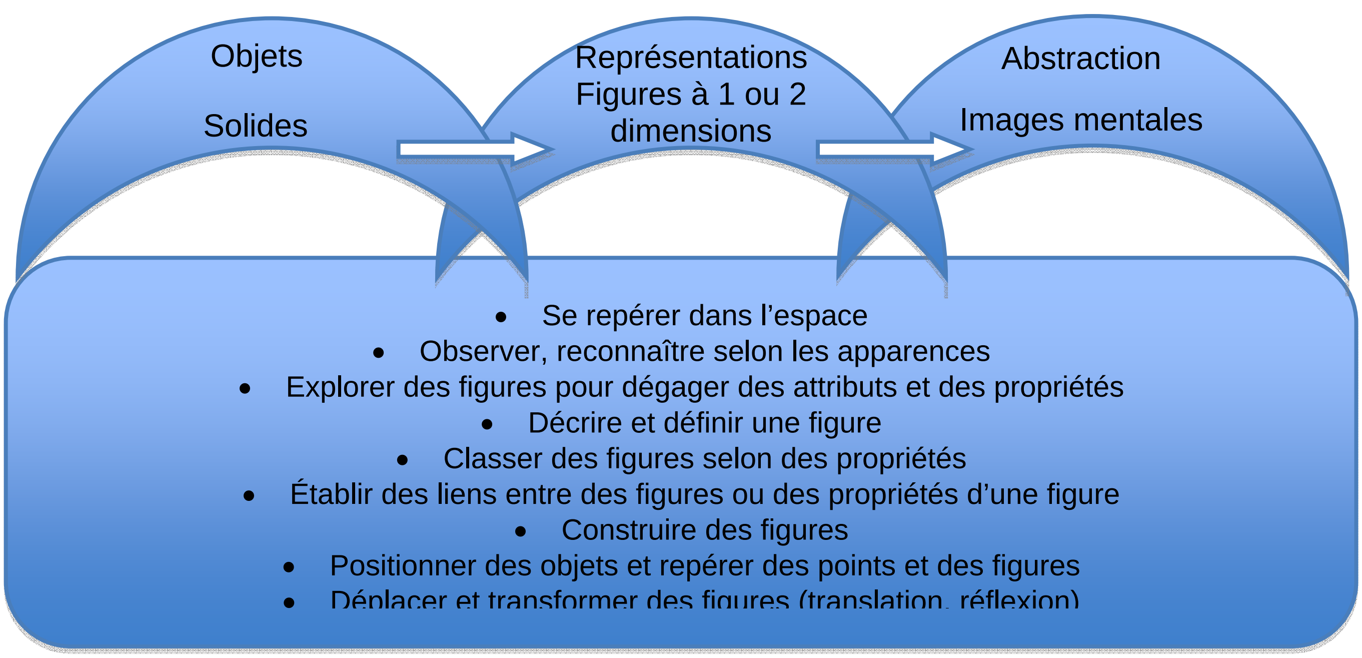
Tout au long du primaire, c'est en réalisant des activités ou en manipulant des objets que l'élève acquiert le vocabulaire propre à la géométrie et apprend à se repérer dans l'espace, à nommer des figures planes et des solides, à décrire des classes de figures et à observer des propriétés de ces classes. Les objets d'étude en géométrie, au primaire, sont les figures planes ou tridimensionnelles qui habitent l'espace. Le repérage dans l'espace et la capacité d'observer les caractéristiques géométriques et topologiques des objets sont des apprentissages clés du cheminement en géométrie. La connaissance du vocabulaire ne suffit pas si les mots ne sont pas intimement liés à des concepts précis tels que la forme, la ressemblance, la dissemblance, l'isométrie ou la symétrie. Des activités variées et l'exploitation d'un éventail d'objets et de représentations sont essentielles au développement du sens spatial et de la pensée géométrique de l'élève. Il évoluera du concret (par la manipulation et l'observation d'objets) vers l'abstrait (par la création d'images mentales de figures et de leurs propriétés) en passant par différentes représentations.

La capacité de dégager et de reconnaître les propriétés d'un objet géométrique ou d'une classe d'objets est préalable à l'apprentissage des relations entre les éléments d'une figure ou entre des figures distinctes. Elle est préalable également à la capacité d'énoncer de nouvelles propriétés et d'utiliser des propriétés connues ou nouvelles dans la résolution de problèmes.

L'habileté à décrire des transformations est intimement liée à d'autres habiletés, mais constitue en elle-même un élément important dans les apprentissages, tout comme l'habileté à transformer une chaîne d'opérations arithmétiques en une autre. Au primaire, décrire une transformation de figures, c'est savoir reconnaître et décrire des réflexions et des translations. C'est aussi pouvoir décrire un dallage ou une frise en termes de transformations géométriques et c'est savoir expliquer comment utiliser un développement dans le plan pour reconstituer un solide.

Finalement, la géométrie est liée aux autres champs de la mathématique. Par sa nature, elle est étroitement associée à la mesure, elle procure des supports pour les probabilités ou la statistique (diagramme circulaire) et contribue au développement du sens du nombre et des opérations à l'aide de différentes représentations.

Le schéma suivant illustre des actions associées au développement du sens spatial et de la pensée géométrique.



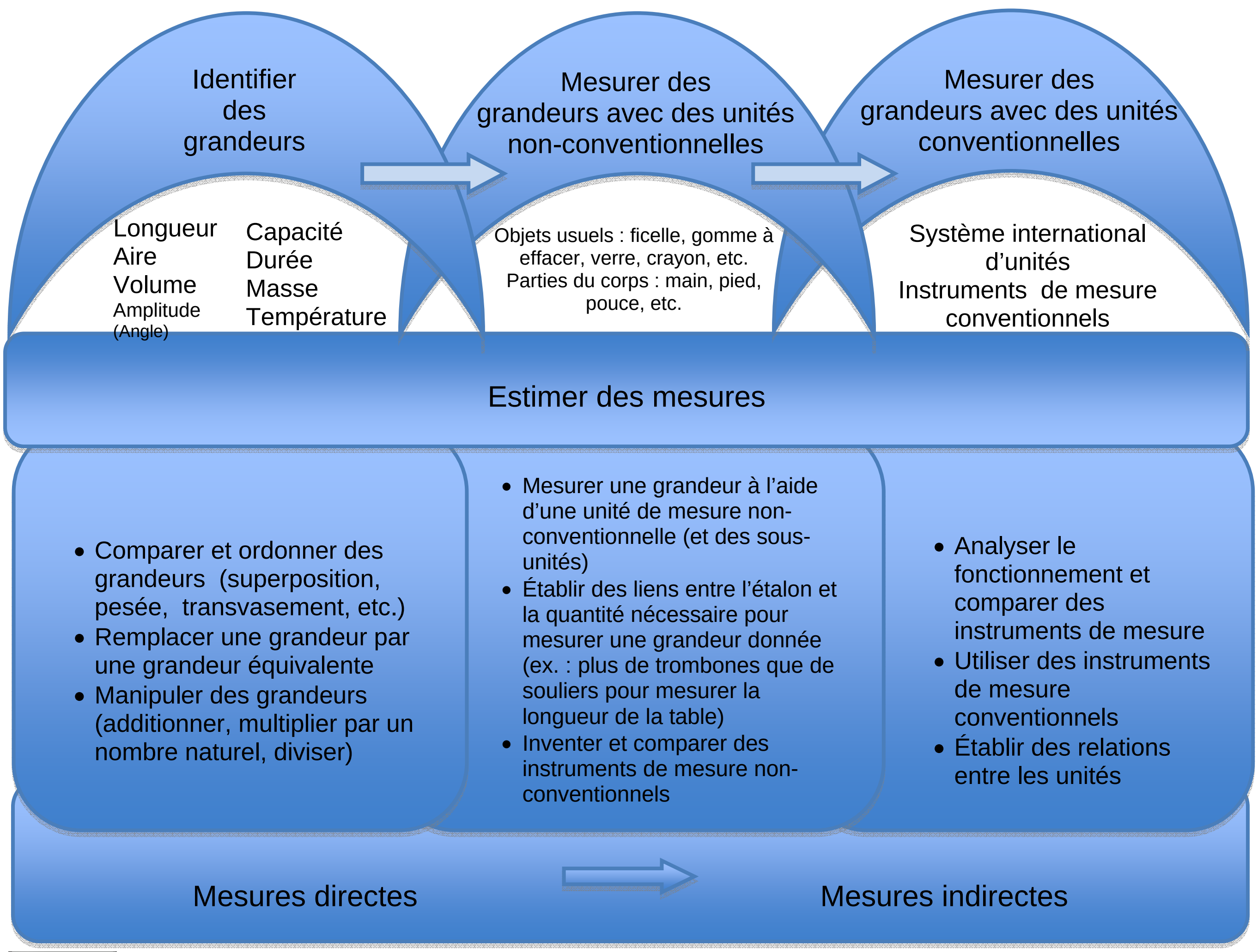
MESURE

Avant son arrivée au préscolaire, l'enfant acquiert les rudiments de la mesure : évaluation et comparaison de grandeurs. Au préscolaire, il commence à mesurer à l'aide d'instruments tels une corde ou une échelle de grandeur (utilisée pour la taille).

Établir une relation entre deux figures géométriques, c'est y reconnaître une ressemblance de forme (similitude) ou de mesure (isométrie); c'est aussi reconnaître qu'une figure peut être placée un certain nombre de fois dans une autre afin de la recouvrir (dallage, mesure). Mesurer va donc bien au delà de la simple lecture d'une mesure sur un instrument. Le développement du sens de la mesure se fait par des comparaisons et des estimations, en utilisant diverses unités de mesure non conventionnelles et conventionnelles. Pour aider l'élève à développer le sens de la mesure (temps, masse, capacité, température, angle, longueur, aire et volume), les activités qui lui sont proposées doivent l'amener à concevoir et à construire des instruments de mesure et à utiliser des instruments de mesure inventés ou conventionnels ainsi qu'à manipuler des unités de mesure conventionnelles. Celui-ci devra réaliser des mesures directes (ex. : le calcul d'un périmètre ou d'une aire, la graduation d'une règle) ou des mesures indirectes (ex. : lire un dessin à l'échelle, tracer un dessin à l'échelle, mesurer l'aire en décomposant une figure, calculer l'épaisseur d'une feuille en connaissant l'épaisseur de plusieurs).

L'apprentissage des éléments de base du système international d'unités contribue aux apprentissages visés par le programme Science et technologie. De plus, la mesure est liée aux autres champs de la mathématique. Elle permet d'exploiter le sens du nombre et des opérations (ex. : base 10, nombres décimaux, fractions), le sens spatial et les figures géométriques. Des mesures sont utilisées en probabilité et en statistique lors d'expériences ou d'enquêtes.

Le schéma suivant illustre des actions associées au développement du sens de la mesure.



STATISTIQUE

Tout au long du primaire, l'élève participe à la réalisation d'enquêtes[11] pour répondre à un questionnement et tirer des conclusions. Il apprend à formuler différents types de questions, à déterminer des catégories ou des choix de réponses, à planifier et à réaliser des collectes de données et à les organiser au moyen, notamment, de tableaux. Pour développer sa pensée statistique, l'élève est donc initié à la statistique descriptive qui correspond à la transformation de données brutes en une synthèse qui allie à la fois la fidélité (rigueur) et la clarté.

Les activités qui lui sont proposées doivent l'amener à représenter des données à l'aide de tableaux ou de diagrammes à bandes horizontales ou verticales, de diagrammes à pictogrammes ou de diagrammes à ligne brisée, selon le type de données[12]. Il doit également être appelé à les interpréter, notamment en observant leur distribution (ex. : étendue, centre, regroupements) ou en comparant des données issues d'un même tableau ou diagramme. Il pourra aussi s'interroger en comparant des questions différentes, les échantillons choisis, les données obtenues et leurs différentes représentations. Il devra également avoir l'occasion d'interpréter des diagrammes circulaires[13] et de développer le sens de la moyenne arithmétique pour ensuite la calculer.

La statistique permet donc à l'élève de mobiliser ses savoirs associés à l'arithmétique, à la mesure et de faire appel aux différents modes de représentation, à différentes stratégies et différents raisonnements.

PROBABILITÉ

Lorsqu'il cherche à établir une probabilité, l'élève du primaire utilise spontanément un raisonnement intuitif, souvent arbitraire. Sa prédiction peut aussi se baser sur l'affectivité, ce qui peut l'amener à souhaiter obtenir le résultat prédit ou à réfuter le résultat obtenu. Les activités proposées[14] en classe devraient lui permettre de tendre vers un raisonnement probabiliste. Ce dernier implique de prendre en compte l'incertitude des résultats, ce qui peut constituer un obstacle conceptuel, car l'élève aura plutôt tendance à déterminer les résultats en recherchant une régularité ou un équilibre des résultats[15].

Au primaire, l'élève observe et réalise des expériences liées au concept de hasard. Il s'exerce à prédire qualitativement des résultats en se familiarisant avec les concepts de résultat certain, de résultat possible, de résultat impossible. Il s'exerce également à comparer des expériences pour dégager des événements plus probables, également probables et moins probables. Il dénombre les résultats d'une expérience aléatoire à l'aide de tableaux et de diagrammes en arbre et compare quantitativement des résultats fréquentiels obtenus avec des résultats théoriques connus.

De plus, des liens peuvent être établis avec les autres champs de la mathématique. Par exemple, les outils de la statistique permettent à l'élève de faire un relevé des résultats dans un tableau d'une expérience aléatoire et d'interpréter les résultats obtenus. Le dénombrement des résultats possibles d'une expérience et l'expression d'une probabilité sous une forme numérique (fraction, pourcentage, nombre décimal) permettent d'établir des liens avec l'arithmétique. La géométrie et la mesure fournissent des occasions d'approfondir le vocabulaire et de comprendre les outils utilisés en probabilités (dés, roulettes, etc.) en s'appuyant par exemple sur les propriétés des figures géométriques.

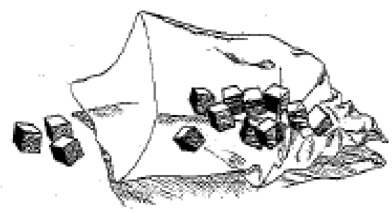
11. Une enquête peut être réalisée avec des observations (couleurs, vêtements, formes, expériences scientifiques ou aléatoires), des questionnaires, des mesures (ex. : taille, durée), etc.
12 . Par exemple, le diagramme à ligne brisée est utilisé pour des données à caractère quantitatif continu (longueurs, températures, masses, temps, etc.).
13. *L'élève doit interpréter le diagramme circulaire et non le construire. Cette interprétation se fait à l'aide des concepts de fraction et de pourcentage.*
14. Le travail sur les probabilités est une belle occasion de démythifier les conceptions liées au hasard et de favoriser le développement d'un jugement critique.
15. *Par exemple, sur une roulette à deux secteurs, jaune et rouge, si le jaune sort trois fois, l'élève s'attendra à ce que le rouge sorte à son tour.*

Annexe 1 – Type de matériel
pour travailler les nombres naturels au primaire

« La numération de position repose sur plusieurs principes…
La valeur d'un signe dépend de sa position dans l'écriture du nombre. Cette valeur représente un groupement d'unités inférieures qui sont échangées contre un élément de l'unité immédiatement supérieure. Le groupement est régulier, c'est-à-dire qu'un groupement contient toujours le même nombre d'éléments pour être échangé contre l'unité supérieure, quelque soit l'ordre de cette unité. »

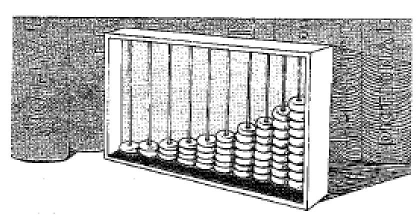
Tiré de Institut national de recherche pédagogique, Équipe de recherche en didactique des mathématiques sous la direction deRoland Charnay, ERMEL, Apprentissages numériques et résolution de problèmes – CP,Hatier, Paris, p. 250.

Le matériel aux groupements apparents et accessibles : Il s'agit du matériel le plus facile à utiliser par les jeunes élèves qui commencent à apprendre la numération. Dans ce type de matériel, les unités sont apparentes dans le premier groupement ; les élèves voient les 10 unités qui forment la dizaine, par exemple, et ces unités sont accessibles, c'est-à-dire que les élèves peuvent aller chercher 10 unités directement dans la dizaine. Cela vaut pour tous les groupements ; ainsi, on voit les éléments qui composent le deuxième groupement. Ce type de matériel est fort utile pour les groupements et leur composition. C'est souvent du matériel « maison » : par exemple, un petit cube représente une unité ; lorsqu'on a 10 unités ou 10 cubes, on les met dans un petit sac en plastique (la dizaine), et lorsqu'on a 10 petits sacs, on les met dans un sac plus grand.



Le matériel aux groupements apparents mais non accessibles : Avec ce matériel, les unités ne sont pas directement accessibles. Les élèves ne peuvent retirer directement les 10 unités qui composent la dizaine (avec le matériel précédent, pour défaire une dizaine, les élèves n'ont qu'à retirer les unités du petit sac). Toutefois, ce type de matériel permet de voir les unités qui composent le premier groupement et les éléments qui composent les autres groupements. Le matériel « blocs base dix » est un bel exemple de ce type de matériel. Il est composé d'unités, ou petits cubes, de barres (premier groupement), de plaquettes (deuxième groupement) et de gros cubes (troisième groupement). Même si l'on trouve dans les écoles du matériel « blocs base dix » (on a alors des unités, des barres-dizaines, des plaquettes-centaines et le gros cube pour l'unité de 1000), il est également offert dans d'autres bases, d'où l'appellation de « matériel multibase ». Ce type de matériel permet de voir une autre caractéristique de notre système de numération : l'échange. Il est aussi fort utile pour les groupements et leur composition.

Le matériel aux groupements symboliques : Avec ce type de matériel, les groupements ne sont ni accessibles ni apparents : ils sont symboliques. Les élèves doivent donc se souvenir de la règle de groupement (dans notre système de numération, cette règle est régulière : on travaille en base dix avec des groupements réguliers). Comme il est plus difficile de travailler avec ce matériel, il sera introduit plus tard que les deux autres. L'abaque ou le boulier sont des exemples de ce type de matériel, qui peut servir à illustrer la valeur positionnelle. L'argent est aussi un système aux groupements symboliques. En effet, on ne voit pas dans la pièce de 10 ¢ les 10 pièces de 1 ¢ qui la composent. De plus, la pièce de 10 ¢ est plus petite que celle de 1 ¢.

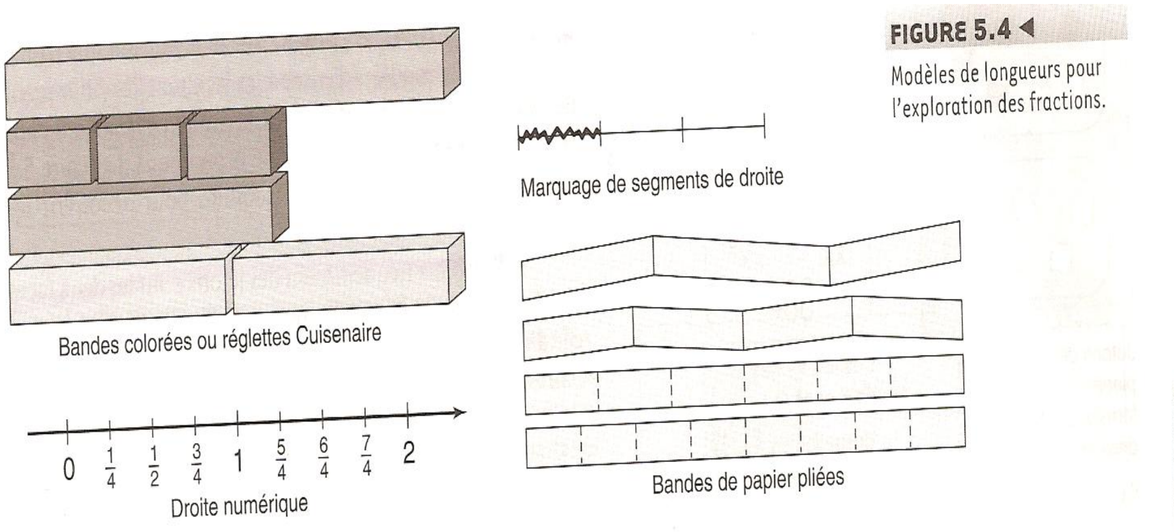


Tiré de Louise Poirier, Enseigner les maths au primaire – Notes didactiques, ERPI, Montréal 2001, p. 38 à 40.

Annexe 2 – Type de matériel pour travailler les fractions, les décimaux et le pourcentage au primaire

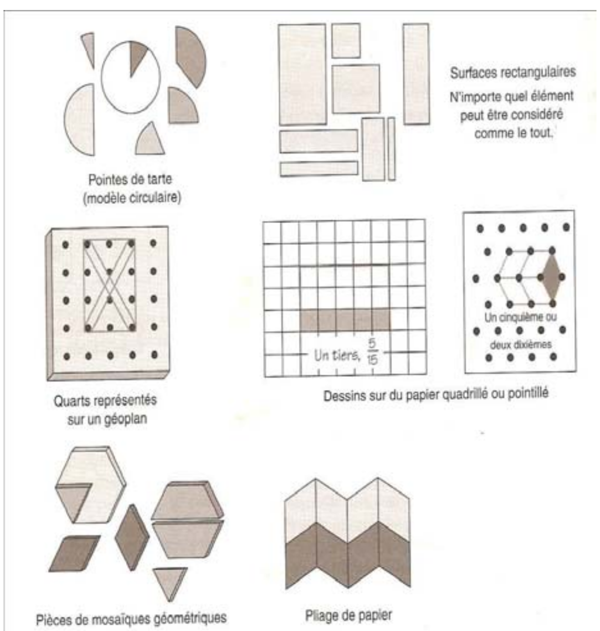
La fraction d'un tout

<u>Les modèles de longueuir</u>



Tiré de Van de Walle, John A., L'enseignement des mathématiques, L'élève au centre de son apprentissage, tome 2, ERPI, Montréal, 2008, p. 141

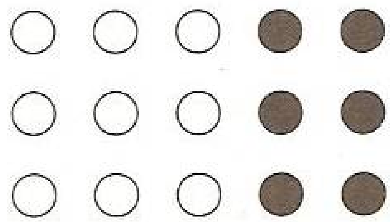
<u>Les modèles de surfaces ou d'aire</u>



Tiré de Van de Walle, John A., L'enseignement des mathématiques, L'élève au centre de son apprentissage, Tome 2, ERPI, Montréal, 2008, p. 140

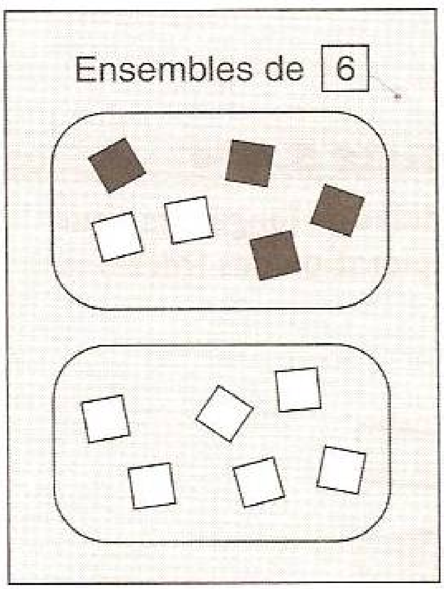
Annexe 2 – Type de matériel pour travailler les fractions au primaire

La fraction d'une collection



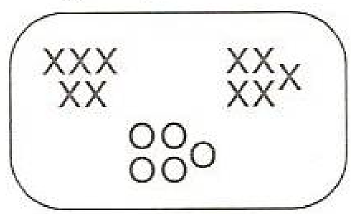
Jetons de deux couleurs disposés de façon rectangulaire. Ce type de disposition facilite la représentation des parties. Chaque disposition rectangulaire constitue un tout.

Ici : $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$.



Jetons de deux couleurs placés à l'intérieur de formes géométriques dessinées sur du papier.

Illustration de $1\frac{2}{6}$.



Dessins formés de X et de O.

Illustration de $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

Tiré de Van de Walle, John A., L'enseignement des mathématiques, L'élève au centre de son apprentissage, tome 2, ERPI, Montréal, 2008, p. 142

Annexe 3 – Les processus personnels de calcul

Extrait du livre
L'enseignement des mathématiques : L'élève au centre de son apprentissage, *Tome I, p. 166 à 169*
John A. Van de Walle-LouAnn H. Lovin. 2007
Éditions ERPI

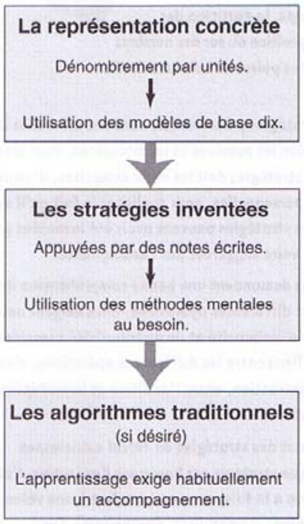


FIGURE 6.1 ▲
Trois types de stratégies de calcul.

La figure 6.1 présente trois groupes de stratégies de calcul. Le premier est celui des méthodes de représentation concrète. Ces méthodes sont inefficaces, mais avec un accompagnement approprié, elles peuvent se muer en un ensemble de stratégies inventées flexibles et pratiques (deuxième groupe). Comme le souligne cette figure, bon nombre de ces méthodes permettent de procéder par calcul mental même si aucune d'entre elles n'a été conçue spécifiquement à cet effet. Les algorithmes traditionnels avec papier et crayon (troisième groupe) sont encore présents dans le programme de mathématiques. Toutefois, l'attention qui leur est accordée devrait, à tout le moins, faire l'objet de discussions.

La représentation concrète

La *représentation concrète* consiste à utiliser des dessins ou du matériel de manipulation avec le dénombrement, qui permettent de représenter concrètement une opération ou un problème en contexte. Cette étape précède habituellement les stratégies inventées. La figure 6.2 propose un exemple avec du matériel de base dix, mais les élèves utilisent souvent de simples jetons ou dénombrent les unités.

Les élèves qui dénombrent les unités de manière systématique n'ont probablement pas encore compris le concept de regroupement avec la base dix. Cela ne signifie pas pour autant qu'ils devraient cesser de résoudre des problèmes avec des nombres à deux chiffres. Lorsque vous travaillerez avec ces élèves, suggérez-leur (sans les obliger) de regrouper les jetons par dizaines pendant qu'ils dénombrent. Au lieu de faire de grosses piles de jetons, ils pourraient utiliser des cubes emboîtables pour fabriquer des barres représentant les dizaines, ou regrouper des jetons par dizaines dans des verres. Certains élèves utiliseront le bâtonnet comme outil de calcul pour dénombrer les dizaines, même s'ils comptent chaque segment du bâtonnet unité par unité.

Les élèves commenceront à utiliser spontanément les concepts et les modèles de base dix pour représenter concrètement les problèmes, une fois qu'ils se seront familiarisés avec ces principes. Même en utilisant du matériel de base dix, les élèves trouveront différents moyens de résoudre des problèmes.

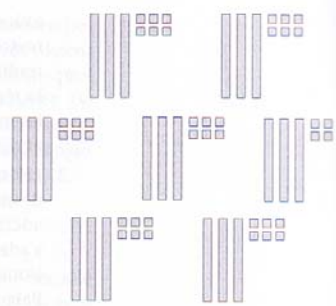


FIGURE 6.2 ▲
Exemple de représentation concrète de 36 × 7 avec des modèles de base dix.

Les stratégies inventées

Nous appellerons *stratégie inventée* (ou *stratégie personnelle*) toute stratégie qui n'est pas un algorithme traditionnel et qui ne comporte ni utilisation de matériel de manipulation ni dénombrement d'unités. Ces stratégies inventées sont également qualifiées de stratégies *flexibles et personnalisées*. De telles stratégies sont parfois exécutées mentalement. Par exemple, il est possible de calculer mentalement la somme 75 + 19 (75 + 20 égale 95, moins 1 égale 94). Pour la somme 847 + 256, certains élèves pourraient écrire les étapes intermédiaires en guise d'aide-mémoire pendant qu'ils résolvent le problème. (Faites-en vous-même l'essai.) En classe, il est conseillé d'utiliser un support écrit pendant l'élaboration d'une stratégie. Les notes écrites sont faciles à mettre en commun et permettent aux élèves de se concentrer sur les idées. Il n'est pas important, surtout pendant la période d'acquisition de la stratégie de faire la distinction entre les processus faisant appel à l'écrit, au partiellement écrit et au mental.

Au cours des deux dernières décennies, plusieurs recherches se sont penchées sur la façon dont les élèves abordaient les situations de calcul lorsqu'ils ne connaissaient pas d'algorithme ou de stratégie spécifique. Différents programmes du primaire fondent d'ailleurs le développement des méthodes de calcul sur les stratégies inventées par les élèves. Ces programmes sont souvent appelés « programmes révisés » (*Investigations in Number, Data, and Space, Trailblazers*, et *Everyday Mathematics*). « Les données montrent de plus en plus clairement qu'à l'école et en dehors de l'école, les élèves construisent des méthodes pour additionner et soustraire des nombres à plusieurs chiffres sans consignes explicites » (Carpenter et collab., 1998, p. 4).

Par ailleurs, tous les élèves n'inventent pas leurs propres stratégies. C'est pourquoi il est souhaitable de mettre en commun les stratégies inventées de certains élèves afin que leurs camarades puissent les explorer et les mettre à l'essai. Cependant, on ne devrait pas permettre à un élève d'utiliser une méthode qu'il ne comprend pas.

Les différences avec les algorithmes traditionnels

Il existe des différences importantes entre les stratégies inventées et les algorithmes traditionnels.

1. *Les stratégies inventées sont axées sur les nombres plutôt que sur les chiffres.* Par exemple, une stratégie inventée pour 618 – 254 pourrait commencer par 600 – 400 égale 200. Une autre approche pourrait commencer avec 254. Ajouter 46 donne 300, puis 300 de plus égale 600. Dans chaque cas, le calcul commence avec les nombres complets à trois chiffres plutôt qu'avec les chiffres pris individuellement, par exemple 8 – 4, comme dans l'algorithme traditionnel. Avec l'algorithme traditionnel pour 45 + 32, les enfants ne pensent jamais à 40 et 30, mais plutôt à 4 + 3. Kamii, qui milite depuis longtemps contre les algorithmes, prétend qu'ils favorisent le « désapprentissage » de la valeur de position (Kamii et Dominick, 1998).
2. *Les stratégies inventées favorisent le calcul à partir de la gauche plutôt que de la droite.* Les stratégies inventées commencent avec les éléments les plus grands des nombres, qui sont représentés par les chiffres les plus à gauche. Pour 86 – 17, une stratégie axées sur le calcul à partir de la gauche, ainsi que d'autres méthodes similaires, permettent d'entrevoir rapidement l'ordre de grandeur de la réponse. Avec l'approche traditionnelle, après avoir emprunté à 8 pour calculer 16 – 7, on sait seulement que la réponse se termine par un 9. En commençant le calcul avec les chiffres à droite, les méthodes traditionnelles ne révèlent le résultat qu'à la toute fin. La division non abrégée en est l'exception.
3. *Les stratégies inventées sont flexibles et non rigides.* Comme dans les points 1 et 2 ci-dessus, il est possible d'employer plusieurs stratégies pour commencer à faire une addition ou une soustraction. Les stratégies inventées permettent également de s'adapter aux nombres en présence. Essayez de calculer mentalement les deux additions suivantes : 465 + 230 et 526 + 98. Avez-vous utilisé la même méthode ? Avec l'algorithme traditionnel, on a tendance à utiliser un même outil pour tous les problèmes. L'algorithme traditionnel pour 7000 – 25 provoque habituellement des erreurs, tandis qu'une stratégie mentale est relativement simple.

Les avantages des stratégies inventées

Les avantages associés aux stratégies inventées ne se limitent pas à la facilitation du calcul. Autant leur développement que leur utilisation régulière offrent des avantages difficiles à ignorer.

- *Les concepts de base dix sont renforcés.* Il existe un lien étroit entre le développement des concepts de base dix et le processus de création des stratégies de calcul (Carpenter et collab. 1998). « Les stratégies inventées sont un indice caractéristique de compréhension » (p. 16). On devrait intégrer la création de stratégies inventées à l'acquisition des concepts de base dix, et ce, dès la première année.
- *Les élèves font moins d'erreurs.* Les recherches ont montré que, lorsque les élèves utilisent leurs propres stratégies de calcul, ils ont tendance à commettre moins d'erreurs parce qu'ils emploient des méthodes qu'ils comprennent (p. ex., voir Kamii et Dominick, 1997). Les décennies centrées sur l'enseignement des algorithmes traditionnels ont montré que, peu importe l'approche conceptuelle utilisée, les élèves font beaucoup d'erreurs, lesquelles deviennent souvent systématiques et récurrentes. Les stratégies inventées n'amènent pas les élèves à commettre des erreurs systématiques.
- *Il est moins nécessaire de reprendre l'enseignement.* Les élèves utilisent rarement une stratégie inventée qu'ils ne comprennent pas. Les liens entre les idées sous-jacentes et le sens des nombres sont solides, ce qui confère aux stratégies un caractère plus permanent. À l'inverse, on remarque que les élèves ont souvent recours aux algorithmes traditionnels sans pouvoir expliquer pourquoi ils fonctionnent (Carroll et Porter, 1997).
- *Les stratégies inventées offrent un point de départ pour le calcul mental et l'estimation.* Comme les algorithmes traditionnels sont mal adaptés aux stratégies de calcul mental et d'estimation, les élèves doivent abandonner temporairement les stratégies qu'on leur a enseignées pour en apprendre de nouvelles, qui sont basées sur les nombres et sur les méthodes de calcul à partir de la gauche. Il serait donc plus logique d'enseigner ces méthodes dès le début. À mesure que les élèves maîtrisent de mieux en mieux ces méthodes flexibles, d'abord en utilisant du papier et un crayon, ils finiront par les utiliser mentalement ou par les adapter à des méthodes d'estimation. Encore une fois, il en résulte un gain de temps dans la réalisation du programme.
- *Flexibles, les stratégies inventées sont souvent plus rapides que les algorithmes traditionnels.* Il est navrant de voir un élève (et même un adulte) se livrer à des regroupements fastidieux pour calculer 300 – 98 ou 4 × 75. La plupart des calculs qu'effectuent quotidiennement les adultes sans calculatrice se prêtent généralement à des méthodes qu'il est souvent possible d'exécuter très rapidement avec une approche non traditionnelle.

- *Les stratégies inventées ne sont pas un désavantage lors des examens.* Les recherches montrent que les élèves qui n'apprennent pas les algorithmes traditionnels réussissent aussi bien les calculs lors des épreuves uniques que les élèves qui suivent un programme traditionnel (Campbell, 1996; Carroll, 1996, 1997; Chambers, 1996). De plus, les élèves réussissent bien les problèmes en contexte, car l'acquisition des stratégies inventées fait largement appel à ce type de problème. Les exigences sur le plan de l'évaluation ne commandent pas le recours aux algorithmes traditionnels.

Le calcul mental

Une stratégie de calcul mental est tout simplement une stratégie inventée qui se déroule mentalement. Ce qui peut être une stratégie mentale pour un élève peut exiger un support écrit pour un autre. Au début, on ne devrait pas exiger des élèves qu'ils effectuent du calcul mental, car cela pourrait s'avérer contre-indiqué pour ceux qui n'ont pas encore élaboré de stratégie inventée ou qui en sont encore au stade de la représentation concrète. Par ailleurs, vous pourriez être surpris de la capacité des élèves (et de votre propre capacité) à calculer mentalement.

Faites un essai avec l'exemple suivant :

$$342 + 153 + 481$$

PAUSE

Pour l'addition présentée ci-dessus, essayez la méthode suivante : commencez par additionner les centaines en énumérant les totaux au fur et à mesure : *3 centaines, 4 centaines, 8 centaines*. Ensuite, additionnez successivement les dizaines, puis les unités. Faites cet exercice immédiatement.

Lorsque vos élèves seront devenus plus habiles, vous pourriez et devriez leur proposer à l'occasion de faire mentalement les calculs exigés. Ne vous attendez pas à ce que tous les élèves possèdent les mêmes habiletés en ce sens.

Annexe 4 – Suggestions de matériel de manipulation en mathématique pour le primaire

Arithmétique

<table>
<tr>
<td>

Pour les petits nombres :

- Jetons de différentes couleurs et de différentes grosseurs
- Cubes emboîtables de différentes couleurs
- Tapis des nombres
- Les grilles de 5 ou de 10
- Jeux de cartes
- Dés
- Calendrier (à reconstruire à chaque mois)
- Dominos
- différents objets de différentes grosseurs (fèves de Lima, haricots, boutons, bouchons…)
- Cartes à points (constellations)

</td>
<td>

Pour les grands nombres :

- Fèves, haricots… grande quantité avec sacs transparents…
- Matériel de base dix régulier, transparent ou fait maison (bâtonnets, boutons, élastiques…)
- Cubes emboîtables
- Réglettes à compter ou cuisenaire
- La grille des 100
- calculatrice
- Argent en papier
- Monnaie
- Variété d'abaques ou de bouliers
- Planche à calculer
- Papier quadrillé
- Géoplan ou papier à points quadrillé
- Rabats numériques
- Calculatrice

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Fractions :

- Carreaux de couleurs (4 couleurs)
- Jetons de différentes couleurs et de différentes formes
- Réglettes Cuisenaire
- Des pièces fractionnaires de différentes formes (papier, en plastique ou autre matériau)
- Blocs mosaïques ou blocs formes
- Les boîtes à oeufs
- Géoplans ,
- Papier quadrillé ou papier pointé
- Monnaie
- Droites numériques
- Les barres de fractions
- Tangrams
- Feuilles de papiers de différentes grandeurs
- Élastiques de couleurs différentes
- Cercles transparents de couleurs différentes
- Petites horloges
- Trombones de couleurs différentes en plastique
-

</td>
<td>

Nombres décimaux :

- Les grilles de 10
- Les grilles de centième
- Les cartes de nombres décimaux : cartes de différentes couleurs : rouges (dixièmes), vertes (centièmes) et jaunes (millièmes)
- Matériel de base 10
- Les droites numériques
- Pièces de monnaie
- Modèle de mesure (mètre)
- Tableaux de valeur de position

Pourcentage :

- Les grilles de centièmes
- Les cartes de nombres décimaux en centièmes
- Les cercles de pourcentages

</td>
</tr>
</table>

Géométrie

- Ensemble de solides
- Ensemble de développement de solides
- Blocs mosaïques
- Blocs logiques
- Mètres
- Miroir
- Mira
- Géoplans et élastiques
- Pailles, pâte à modeler et cures-pipes
- Ensemble de pochoirs géométriques
- Estampes géométriques (figures planes et 3D)
- Tangrams

Mesure

- Cordes ou autres instruments de mesure non conventionnels
- Mètres en bois (cm indiqués, dm apparents…)
- Ruban à mesurer
- Horloge d'apprentissage
- Chronomètres
- Minuteurs
- Sabliers
- Thermomètres
- Calendrier (avec pochettes, à reconstruire)
- Estampes d'horloge
- Rapporteur d'angles
- Papier quadrillé, pointé, triangulé

Probabilité et statistique

- Dés de couleur
- Roulettes pour jeux de hasard
- Plastiportable 1m X 1m (tableau quadrillé translucide qui adhère par statique au tableau vert)

Ce matériel est disponible chez Brault et Bouthiller, Spectrum ou autres magasins…